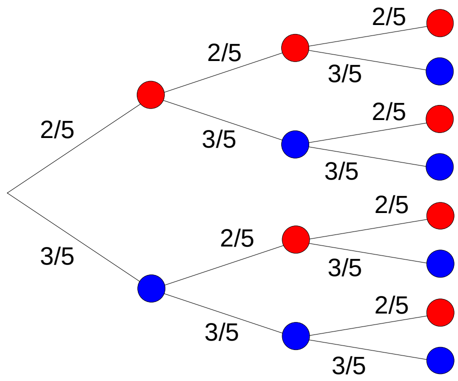
Mehrstufige Zufallsversuche Aufgaben II - Lösungen

A1



$$P(\{rrr\}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}064$$

$$P(\{rrb\}) = P(\{rbr\}) = P(\{brr\}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}096$$

$$P(\{rbb\}) = P(\{brb\}) = P(\{bbr\}) = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0{,}144$$

$$P(\{bbb\}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}216$$

a) A: Alle Kugeln sind blau.

$$P(A) = P(\{bbb\}) = \underline{\underline{0{,}216}}$$

b) B: Eine Kugel ist blau, zwei sind rot.

$$P(B) = P(\{rrb\}) + P(\{rbr\}) + P(\{brr\}) = 3\cdot 0{,}196 = \underline{\underline{0{,}288}}$$

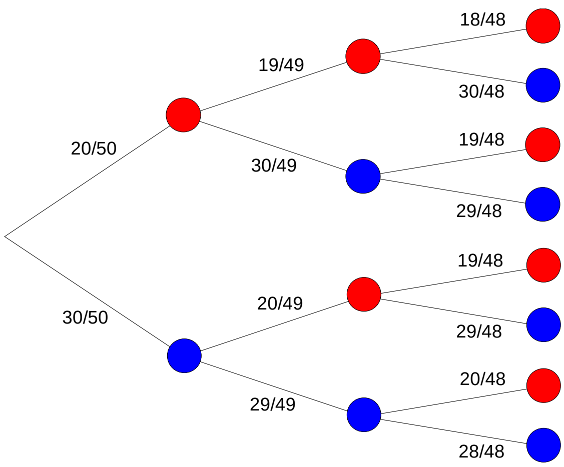
c) C: Eine Kugel ist rot, zwei sind blau.

$$P(C) = P(\{rbb\}) + P(\{brb\}) + P(\{bbr\}) = 3\cdot 0{,}144 = \underline{\underline{0{,}432}}$$

d) D: Höchstens eine Kugel ist rot. Das bedeutet keine oder nur eine.

$$P(D) = P(\{bbb\}) + P(\{bbr\}) + P(\{brb\}) + P(\{rbb\}) = 0{,}216 + 3\cdot 0{,}144 = \underline{\underline{0{,}648}}$$

A2



$$P(\{rrr\}) = \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\cdot\frac{18}{48}$$

$$P(\{rrb\}) = \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\cdot\frac{30}{48} = C$$

$$P(\{rbr\}) = \frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}\cdot\frac{19}{48} = \frac{30\cdot 20\cdot 19}{50\cdot 49\cdot 48}$$

$$P(\{rbb\}) = \frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}\cdot\frac{29}{48} = \frac{30\cdot 29\cdot 20}{50\cdot 49\cdot 48}$$

$$P(\{brr\}) = \frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}\cdot\frac{19}{48} = \frac{30\cdot 20\cdot 19}{50\cdot 49\cdot 48}$$

$$P(\{brb\}) = \frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}\cdot\frac{29}{48} = \frac{30\cdot 29\cdot 20}{50\cdot 49\cdot 48}$$

$$P(\{bbr\}) = \frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}\cdot\frac{20}{48} = \frac{30\cdot 29\cdot 20}{50\cdot 49\cdot 48}$$

$$P(\{bbb\}) = \frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}\cdot\frac{28}{48}$$

a) A: Alle Kugeln sind blau.

$$P(A) = P(\{bbb\}) = \frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}\cdot\frac{28}{48} \approx \underline{\underline{0{,}207}}$$

b) B: Eine Kugel ist blau, zwei sind rot.

$$P(B) = P(\{rrb\}) + P(\{rbr\}) + P(\{brr\}) = 3\cdot\frac{30\cdot 20\cdot 19}{50\cdot 49\cdot 48} \approx \underline{\underline{0{,}291}}$$

c) C: Eine Kugel ist rot, zwei sind blau.

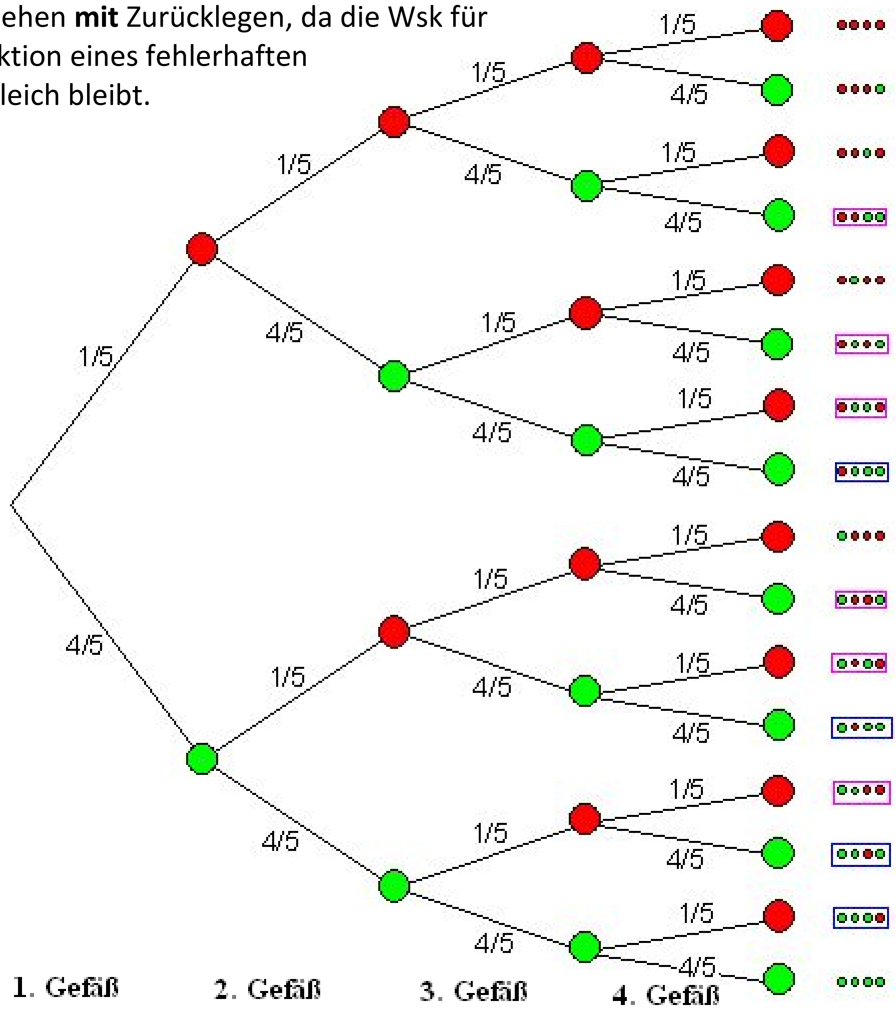
$$P(C) = P(\{rbb\}) + P(\{brb\}) + P(\{bbr\}) = 3\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 20}{50\cdot 49\cdot 48} \approx \underline{\underline{0{,}444}}$$

d) D: Höchstens eine Kugel ist rot. Das bedeutet keine oder nur eine.

$$P(D) = P(\{bbb\}) + P(\{bbr\}) + P(\{brb\}) + P(\{rbb\})$$

$$= \frac{30}{50}\cdot\frac{29}{49}\cdot\frac{28}{48} + 3\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 20}{50\cdot 49\cdot 48} \approx \underline{\underline{0{,}651}}$$

A3 **Modell:** Urne mit einer roten (Ausschuss) und vier grünen (kein Ausschuss) Kugeln. Viermal Ziehen **mit** Zurücklegen, da die Wsk für die Produktion eines fehlerhaften Gefäßes gleich bleibt.



a) A: Drei von vier sind brauchbar.
Das Baumdiagramm enthält 4 Pfade, die für das Ereignis A relevant sind.

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 4 \cdot \frac{64}{625} = \underline{\underline{0,4096}}$$

b) B: Zwei von vier sind brauchbar.
Das Baumdiagramm enthält 6 Pfade, die für das Ereignis B relevant sind.

$$P(B) = 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 6 \cdot \frac{16}{625} = \underline{\underline{0,1536}}$$

c) C: Mindestens drei von vier sind brauchbar.
Das bedeutet drei oder mehr sind brauchbar.

$$P(C) = P(A) + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4 \cdot \frac{64}{625} + \frac{256}{625} = \underline{\underline{0,8192}}$$

A4 Modell: Urne mit 20 roten (fehlerhaft) und 80 grünen (fehlerfrei) Kugeln. Viermal Ziehen **ohne** Zurücklegen, wenn man weiß, dass von den 100 Tontöpfen genau 20 Töpfe fehlerhaft sind. Man kann das Baumdiagramm von Aufgabe 3 verwenden, wobei man aber berücksichtigen muss, dass die Wahrscheinlichkeiten sich bei den Verzwigungen ändern!

a) A: Alle 4 Töpfe sind fehlerfrei
Das Baumdiagramm enthält einen Pfad, für den das Ereignis A zutrifft.

$$P(A)=\frac{80}{100}\cdot\frac{79}{99}\cdot\frac{78}{98}\cdot\frac{77}{97}\approx\underline{\underline{0{,}4033}}$$

b) B: Drei der vier entnommenen Töpfe sind fehlerfrei.
Das Baumdiagramm enthält 4 Pfade, die für das Ereignis B relevant sind.

$$P(B)=4\cdot\frac{20\cdot78\cdot79\cdot80}{97\cdot98\cdot99\cdot100}\approx\underline{\underline{0{,}4191}}$$

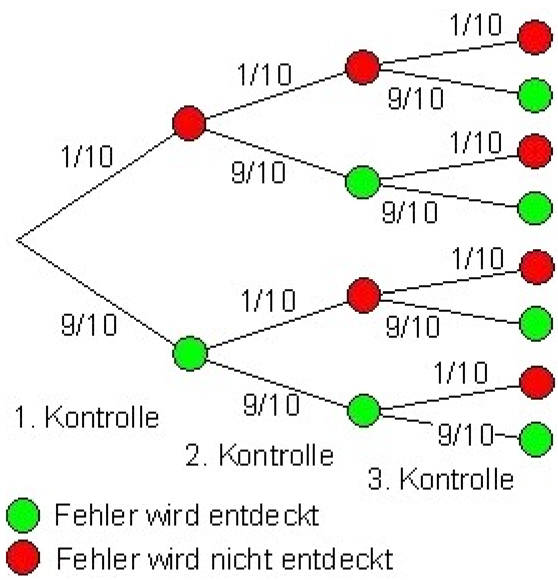
c) C: Mindestens drei der vier entnommenen Töpfe sind fehlerfrei.
Das bedeutet drei oder mehr sind fehlerfrei.

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{80}{100}\cdot\frac{79}{99}\cdot\frac{78}{98}\cdot\frac{77}{97}+4\cdot\frac{20\cdot78\cdot79\cdot80}{97\cdot98\cdot99\cdot100}\approx\underline{\underline{0{,}8224}}$$

A5

Modell:
Urne mit 1 roten (fehlerhaft) und 9 grünen (fehlerfrei) Kugeln. Dreimal Ziehen **mit** Zurücklegen.

Begründung für **mit** Zurücklegen:
Die Kontrollen geschehen unabhängig voneinander.
Die Ausgangssituation vor jeder Kontrolle ist immer wieder die gleiche.
(Übersehen des Fehlers 10%).



a) A: Spätestens bei der 2. Kontrolle erkannt bedeutet,
der Fehler wird in der ersten oder in der zweiten Kontrolle erkannt.

In der ersten Kontrolle erkannt: $P(1.)=\frac{9}{10}=0{,}9$

In der zweiten Kontrolle erkannt: $P(2.)=\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{100}=0{,}09$

$$P(A)=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=\underline{\underline{0{,}99}}$$

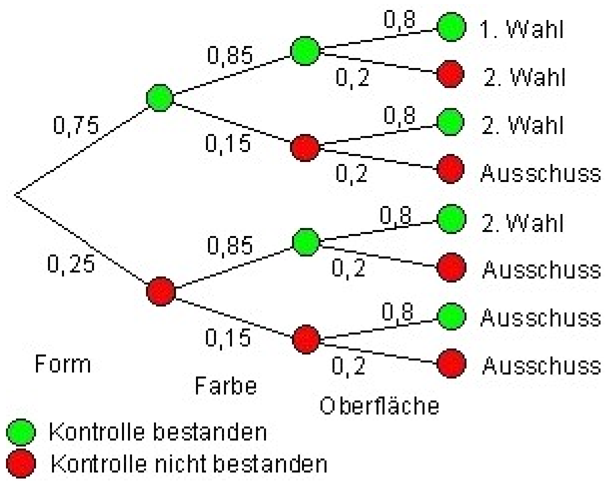
b) B: Erst bei der 3. Kontrolle erkannt.

$$P(B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{1000}=\underline{\underline{0{,}009}}$$

c) C: Wird nicht erkannt.

$$P(C)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}=\underline{\underline{0{,}001}}$$

A6 **a)**



1. Wahl:
$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = \underline{\underline{0,51}}$

2. Wahl:
$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,1275$
$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,09$
$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = 0,17$

Ausschuss:
$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0225$
$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,0425$
$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,03$
$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0075$

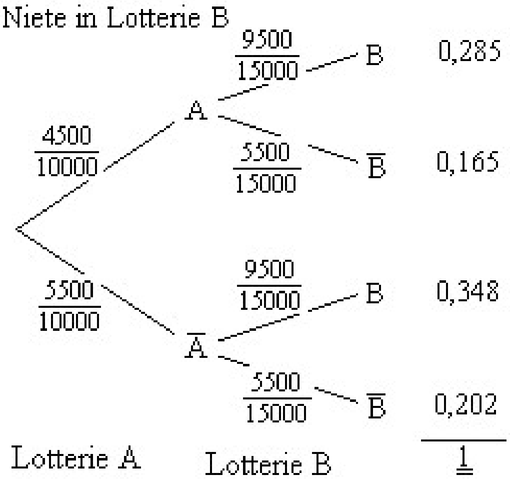
b) $P(1.\text{Wahl}) = \underline{\underline{0,51}}$

c) $P(2.\text{Wahl}) = 0,1275 + 0,09 + 0,17 = \underline{\underline{0,3875}}$

d) $P(\text{Ausschuss}) = 0,0225 + 0,0425 + 0,03 + 0,0075 = \underline{\underline{0,1025}}$

A7

A = Gewinn in Lotterie A
$\overline{A}$ = Niete in Lotterie A
B = Gewinn in Lotterie B
$\overline{B}$ = Niete in Lotterie B



a) $P(A) = \dfrac{4500}{10000} \qquad P(B) = \dfrac{9500}{15000}$

$P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{4500}{10000} \cdot \dfrac{9500}{15000} = \underline{\underline{0,285}}$

b) Es liegt kein Gewinn vor, wenn man in Lotterie A und in Lotterie B nichts gewinnt.
Dabei gilt: $\overline{A}$ Niete in Lotterie A $\qquad$ $\overline{B}$ Niete in Lotterie B

$P(E_2) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{5500}{10000} \cdot \dfrac{5500}{15000} = \underline{\underline{0,202}}$

c) E_3 ist das Gegenereignis von E_2
$P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - 0,202 = \underline{\underline{0,798}}$