Lehrbuch EF Seite 148 Aufg. 2 und 4 – ausführlichere Lösung

A2 **a)** Gib für Würfel mit 6 bzw. 12 Seiten eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Erwartungswerte an.

b) Die beiden Würfel wurden je 50-mal gewürfelt. Die Anzahl, wie oft welche Augenzahl gewürfelt wurde, ist in der Tabelle angegeben. Bestimme die mittlere Punktzahl. Vergleiche diese mit dem Erwartungswert.

x_i	1	2	3	4	5	6
H_i	8	9	7	11	5	10

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H_i	3	4	9	3	4	0	3	5	6	1	6	6

Lösung:

a) Wahrscheinlichkeitsverteilung für die ZG
X: "*geworfene Augenzahl beim 6er Würfel*"

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$
	1	$\mu = \frac{21}{6} = 3,5$

Der Erwartungswert für die geworfene Augenzahl beträgt 3,5.

D. h.: Würfelt man seeeehr oft, ist als Durchschnittswert der geworfenen Augenzahl 3,5 zu erwarten.

b) Mittelwert der geworfenen Augenzahl beim 50maligen Werfen des 6er Würfels

x_i	H_i	$x_i \cdot H_i$
1	8	8
2	9	18
3	7	21
4	11	44
5	5	25
6	10	60
	50	$\overline{x} = 176:50 = 3,52$

Der Mittelwert für die geworfene Augen-zahl beträgt 3,52.

Mittelwert und Erwartungswert liegen sehr nah beieinander.

Wahrscheinlichkeitsverteilung für die ZG
X: "*geworfene Augenzahl beim 12er Würfel*"

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$
4	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$
5	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
6	$\frac{16}{12}$	$\frac{6}{12}$
7	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{12}$
9	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{12}$
10	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{12}$
11	$\frac{11}{12}$	$\frac{11}{12}$
12	$\frac{12}{12}$	$\frac{12}{12}$
	1	$\mu = \frac{78}{12} = 6,5$

Der Erwartungswert für die geworfene Augenzahl beträgt 3,5.

D. h.: Würfelt man seeeehr oft, ist als Durchschnittswert der geworfenen Augenzahl 3,5 zu erwarten.

Mittelwert der geworfenen Augenzahl beim 50maligen Werfen des 12er Würfels

x_i	H_i	$x_i \cdot H_i$
1	3	3
2	4	8
3	9	27
4	3	12
5	4	20
6	0	0
7	3	21
8	5	40
9	6	54
10	1	10
11	6	66
12	6	72
	50	$\overline{x} = 333:50 \approx 6,67$

Der Mittelwert für die geworfene Augen-zahl beträgt 6,67.

Auch hier liegen Mittelwert und Erwartungswert sehr nah beieinander.

A4 **a)** Beschreibe für jedes der nebenstehenden Glücksräder durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Berechne den dazugehörigen Erwartungswert.

b) Das erste Glücksrad soll 50-mal gedreht werden. Notiere zwei plausibel erscheinende Häufigkeitsverteilungen und berechne die zugehörigen Mittelwerte.

c) Erläutere an diesem Beispiel den Zusammenhang zwischen den Erwartungswerten und den Mittelwerten.

Lösung:

a) Wsk.keitsverteilung für das **gelbe Glücksrad**
X: "*gedrehte Zahl*"

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$
6	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{3} = \frac{12}{6}$
	1	$\mu = \frac{29}{6} \approx 4,8$

Der Erwartungswert für die gedrehte Zahl beträgt 3,5.

D. h.: dreht man das Glücksrad seeeehr oft, ist als Durchschnittswert der gedrehten Zahl 4,8 zu erwarten.

b) mögliche Häufigkeitsverteilung der gedrehten Zahlen beim 50maligen Drehen des Glücksrades

x_i	H_i	$x_i \cdot H_i$
3	9	27
4	6	24
5	19	95
6	16	96
	50	$\overline{x} = 242:50 = 4,84$

Der Mittelwert der gedrehten Zahl beträgt 4,84.

Mittelwert und Erwartungswert liegen sehr nah beieinander.

Nichtplausible (nicht denkbare, nicht realistische) Häufigkeitsverteilungen wären zum Beispiel folgende:

x_i	H_i	$x_i \cdot H_i$
3	0	0
4	0	0
5	25	125
6	25	150
	50	$\overline{x} = 375:50 = 7,5$

Es ist kaum vorstellbar, dass zwei Zahlen gar nicht und die anderen beiden je 25x gedreht wurden. Das ist zwar möglich, aber extrem unwahrscheinlich. Da die Wsk. für die "3" $\frac{1}{6}$ beträgt, ist bei 50 Drehungen etwa mit $\frac{1}{6} \cdot 50 \approx 8$ die Zahl "3" zu erwarten. Wird sie dann tatsächlich 5, 6, 7, 8, 9, 10 mal gedreht, liegt das im Bereich normaler Schwankungen, aber 0 mal wäre schon außergewöhnlich bei 50 Verschuen.

Eine unwahrscheinliche Häufigkeitsverteilung erkennt man auch daran, dass ihr Mittelwert stark vom (theoretischen) Erwartungswert abweicht.

Hier im Beispiel beträgt der Mittelwert 7,5. Das weicht stark ab vom Erwartungswert 4,8.

Wsk.keitsverteilung für das **grüne Glücksrad**
X: "*gedrehte Zahl*"

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$
	1	$\mu = \frac{30}{8} = 3,75$

Der Erwartungswert für die gedrehte Zahl beträgt 3,75.

mögliche Häufigkeitsverteilung der gedrehten Zahlen beim 50maligen Drehen des Glücksrades

x_i	H_i	$x_i \cdot H_i$
1	12	12
2	4	8
3	2	6
4	5	20
5	27	125
	50	$\overline{x} = 171:50 = 3,42$

Der Mittelwert der gedrehten Zahl beträgt 4,84.

Mittelwert und Erwartungswert liegen sehr nah beieinander.

Wsk.keitsverteilung für das **blaue Glücksrad**

Analog ergibt sich beim blauen Glücksrad:

$\mu = \frac{65}{12} = 5,41$

c) Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Mittelwert:
Den Mittelwerten liegen die realen Versuche zugrunde (Häufigkeitsverteilung), die Erwartungswerte ergeben sich aus der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung.
In der Regel schwankt der Mittelwert um den Erwartungswert. Große Abweichungen gehen darauf zurück, dass der Versuch nur wenige Male durchgeführt wurde oder tatsächlich die Häufigkeiten einiger Ergebnisse außergewöhnlich oft oder selten aufgetreten sind.