Zum Begriff der Zufallsgröße

Bei der Untersuchung mehrstufiger Zufallsversuche interessiert man sich häufig gar nicht primär für die durch n-Tupel dargestellten Versuchsausfälle, sondern nur für bestimmte Ereignisse, die man leicht mit Hilfe von Zahlen bestimmen kann. Etwa für

- die Augensumme k beim Knobeln mit mehreren Würfeln
- die Anzahl der Treffer unter 10 Schüssen auf eine Torwand
- den Auszahlungsbetrag bei einem Spielautomaten, der davon abhängt, wo drei rotierende Scheiben angehalten werden
- die Anzahl der Reisenden, die auf einem bestimmten Bahnhof in einen bestimmten Zug einsteigen
- die Anzahl der Richtigen beim Lotto
- ...

Diese Größen (Augensumme, Trefferzahl, Auszahlungsbetrag, ...) nehmen jeweils zahlenmäßige Werte an, die vom Zufall bestimmt sind. Solche quantitativen Merkmale eines Zufallsversuchs nennt man deshalb ***Zufallsgrößen*** und bezeichnet sie üblicherweise mit großen Buchstaben wie X, Y und Z. Zu jedem Ergebnis eines Zufallsversuchs gehört somit ein ***Wert der Zufallsgröße***.

Beispiele:
- X: Augensumme k beim Knobeln mit 2 Würfeln
  (X kann die Werte 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 annehmen.)
- Y: Anzahl der Treffer beim viermaligen Schießen auf eine Torwand
  (Y kann die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen.)
- Z: Anzahl der Mädchen in einer Familie mit drei Kindern
  (Z kann die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen.)

Häufig gibt man die Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann, mit deren zugehöriger Wahrscheinlichkeit in einer Tabelle an. Diese Tabelle beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße.

In vielen Fällen interessiert man sich auch nicht primär für die mit X (oder Y oder Z) bezeichnete Zufallsgröße, sondern für den Durchschnittswert dieser Zufallsgröße, den sog. Erwartungswert, der mit E(X) oder µ bezeichnet wird. Mit Hilfe der Tabelle können die Produkte $p_i \cdot x_i$ schnell zum Erwartungswert aufsummiert werden: $E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n$

Schreibweise:

P (X=3) ≙ die Zufallsgröße nimmt den Wert 3 an
P (X≤10) ≙ die Zufallsgröße nimmt höchstens den Wert 10 an (d. h. ist kleiner als 11)
P (X>5) ≙ die Zufallsgröße ist größer als 5 (d. h. nimmt Werte von mindestens 6 an)

Beispiel: **Jedes Los gewinnt!**

Bei der Abi-Abschlussfeier muss jeder der 50 Teilnehmer ein Los kaufen. Der 1. Preis hat einen Wert von 100 €, der 2. von 25 € und der 3. von 10 €. Jeder, der keinen dieser Gewinne bekommt, erhält einen Trostpreis in Höhe von 1 €.
• Wie teuer müsste ein Los sein, damit Einnahmen und Ausgaben übereinstimmen?
• Jedes Los wird für 5 € verkauft. Der Erlös geht ans Friedensdorf. Wie groß ist der Erlös?

Bezeichnet man als Zufallsgröße X: *Wert des gewonnenen Preises*, so kann X die Werte x_i mit x_i= 100, 25, 10 oder 1 (Werte in Euro) annehmen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, mit der diese Werte angenommen werden, bezeichnet man als $p_i = P(X = x_i)$.

Der Erwartungswert wird in der nebenstehenden Tabelle berechnet:

x_i [€]	p_i	$x_i \cdot p_i$ [€]
100	$\frac{1}{50}$	2,00
25	$\frac{1}{50}$	0,50
10	$\frac{1}{50}$	0,20
1	$\frac{47}{50}$	0,94
		E(X) = 3,64

$E(X)$ = 3,64 bedeutet, dass jedes Los 3,64 € kosten muss, damit die Ausgaben gedeckt werden.

Bei einem Lospreis von 5 €und 50 verkauften Losen entsteht ein Gewinn von 50 · (5 – 3,64) = 68 €. Dieser Betrag geht ans Friedensdorf.