Erwartungswert einer Zufallsgröße – Lösungsvorschläge zu den Übungsaufgaben

LÖSUNG A1:

Bei einem Klassenfest muss jeder der 25 Teilnehmer ein Los kaufen. Der erste Preis hat einen Wert von 15 €, der zweite von 10 €, der dritte von 4 €. Außerdem gibt es noch Trostpreise im Wert von 0,50 €.
Was müsste ein Los kosten, damit Einnahmen und Ausgaben übereinstimmen?

X: Wert des Preises [€]

k	$P(X=k)$	$k \cdot P(X=k)$
15	1/25	15/25
10	1/25	10/25
4	1/25	4/25
0,5	22/25	11/25
		$\mu = \frac{40}{25} = 1{,}60$ [€]

LÖSUNG A2:

Ein Getränkehändler kann entweder einen Kiosk in der Stadt pachten, der erfahrungsgemäß einen täglichen Gewinn von 180 DM einbringt oder zu gleicher Miete einen Kiosk am Badesee pachten, der täglich bei gutem Wetter einen Gewinn von 580 DM, bei mäßigem Wetter noch 50 DM, bei schlechtem Wetter aber gar nichts einbringt. Das Wetteramt sagt ihm, er könne im Durchschnitt an 3 von 10 Tagen mit guten, an 3 von 8 Tagen mit mäßigem Wetter rechnen. Wie wird er sich entscheiden?

X: Gewinn des Kioskbetreibers am Badesee

	x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
bei schlechtem W.:	0	$1-(\frac{3}{8}+\frac{3}{10}) = \frac{13}{40}$	0
bei mäßigem Wetter:	50	$\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$	$18\frac{3}{4}$
bei gutem Wetter:	580	$\frac{3}{10} = \frac{12}{40}$	174
		1	$\mu = 192{,}75$ DM

zu erwartende Einnahmen am Badesee

Gewinn des Kioskbetreibers in der Stadt: 180 DM / Tag

→ Auf lange Sicht bringt der Kiosk am Badesee mehr ein!

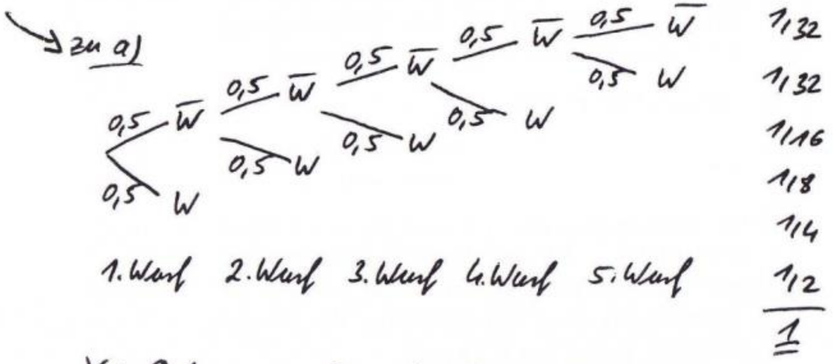
LÖSUNG A4:

A und B v[illegible]baren, eine Münze so lange zu werfen, bis Wappen [illegible]eint, maximal jedoch 5-ma[illegible]. A zahlt an B für jeden notwendigen Wurf 1 €. Ist nach [illegible] 5. Wurf noch kein Wappen gefallen, muss A an B den Betrag von 7 € bezahlen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Verteilung der Zufallsgröße X: *Betrag (in €)*, den A an B zahlen muss und deren Erwartungswert.

b) Wie groß muss der Einsatz von B sein, damit die Spielregel fair ist?

→ zu a)



X: Betrag in €, den A an B zahlt

	x_i [€]	p_i	$x_i \cdot p_i$
W	1	1/2	1/2
$\bar{W} W$	2	1/4	1/2
$\bar{W}\bar{W} W$	3	1/8	3/8
$\bar{W}\bar{W}\bar{W} W$	4	1/16	1/4
$\bar{W}\bar{W}\bar{W}\bar{W} W$	5	1/32	5/32
$\bar{W}\bar{W}\bar{W}\bar{W}\bar{W}$	7	1/32	7/32
		1	$\mu = 2$ [€]

d.h. A zahlt durchschnittlich 2 € an B bei maximal 5 Würfen.

zu b) Damit das Spiel zw. 2 Spielern fair ist, müssen Auszahlung und Einzahlung gleich sein, d.h. dass B pro Spiel 2 € einsetzen muss.

LÖSUNG A7:

In einem Ferienort in Italien bekommt ein Zeitungskiosk jeden Montag einige Exemplare einer bestimmten Sportzeitung aus Deutschland. Der Zeitungshändler bezahlt für eine Zeitung 1250 Lire und verkauft sie für 2000 Lire. Nicht verkaufte Zeitungen kann der Zeitungshändler wegwerfen. Im Laufe der Zeit hat der Händler herausgefunden, daß für die Anzahl X der verlangten Sportzeitungen ungefähr die in *Tab.1* angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt. Wie viele Zeitungen sollte dann der Zeitungshändler pro Woche einkaufen, damit er einen möglichst großen Erwartungswert für seinen Gewinn hat?

x_i	p_i
0	0,05
1	0,20
2	0,40
3	0,25
4	0,10

Tab. 1

Kurz: Einkauf 1250 Lire / Zeitung
Verkauf 2000 Lire / Zeitung
→ Verdienst 750 Lire / Zeitung

Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 : Gewinn des Händlers, wenn er 0, 1, 2, 3 bzw. 4 Z. einkauft

$X_0, X_1, \ldots$: Anzahl der verlangten Z. bei 0, 1, ... eingekauften Z.

Tabelle 4 für Y_2 (Gewinn bei 2 eingekauften Zeitungen)

Anzahl x_i der verlangten Z.	Gewinn y_i bei 2 eingekauften Z.	WS $p_i = P(Y_2 = y_i)$	$y_i \cdot p_i$
0	−2500	0,05	−125
1	−500	0,20	−100
2, 3, 4	+1500	0,75	+1125

$E(Y_2) = 900$

Tabelle 5 für Y_3 (Gewinn bei 3 eingekauften Z.)

x_i	y_i	p_i	$y_i p_i$
0	−3750	0,05	−187,5
1	−1750	0,20	−350
2	+ 250	0,40	+100
3	+2250	0,25	+562,5
4	+2250	0,10	+225
			350 = E(Y_3)

Für die anderen Zufallsgrößen erhält man entsprechend die Erwartungswerte

$E(Y_0) = 0$
$E(Y_1) = 650$ $\qquad E(Y_2) = 900$
$E(Y_3) = 350$
$E(Y_4) = -700$

Für den Zeitungshändler ist es offenbar am günstigsten, wenn er pro Woche zwei Sportzeitungen einkauft.

Lösungsvorschlag I:

X: Anzahl der verkauften Zeitungen

Es war:

x_i	p_i
0	0,05
1	0,20
2	0,40
3	0,25
4	0,10

Einkauf: 1250 Lire pro Zeitung
Verkauf: 2000 Lire pro Zeitung
Verdienst: 750 Lire pro verkaufter Zeitung

Somit ergibt sich für 2 eingekaufte Zeitungen:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
0	0,05	0
1	0,20	0,20
2	0,75	1,50
		$E_2(X) = 1,70$

Erwartungswert für die Anzahl der verkauften Zeitungen, wenn 2 Zeitungen eingekauft werden

Erwarteter Gewinn: $\underline{G_2} = 1,70 \cdot 750$ Lire $- 0,3 \cdot 1250$ Lire $= \underline{\underline{900 \text{ Lire}}}$

Bei 3 eingekauften Zeitungen erhält man:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
0	0,05	0
1	0,20	0,20
2	0,40	0,80
3	0,35	1,05
		$E_3(X) = 2,05$

Erwartungswert für die Anzahl der verkauften Zeitungen, wenn 3 Zeitungen eingekauft werden

Erwarteter Gewinn: $\underline{\underline{G_3}} = 2,05 \cdot 750$ Lire $- 0,95 \cdot 1250$ Lire $= \underline{350 \text{ Lire}}$

Analog: $G_0 = 0$
$G_1 = 650$ Lire
$G_4 = -700$ Lire

D.h.: Beim Einkauf von 2 Zeitungen ist mit dem größtmöglichen Gewinn zu rechnen.