Übungsklausur - so ähnlich hätte die Klausur vor den Osterferien ausgesehen

So wie hier hätte die Klausur vor den Osterferien aussehen können. Nehmt euch 90 Min. Zeit zur Bearbeitung "unter Klausurbedingungen", um abschätzen zu können, wie gut ihr vorbereitet seid.

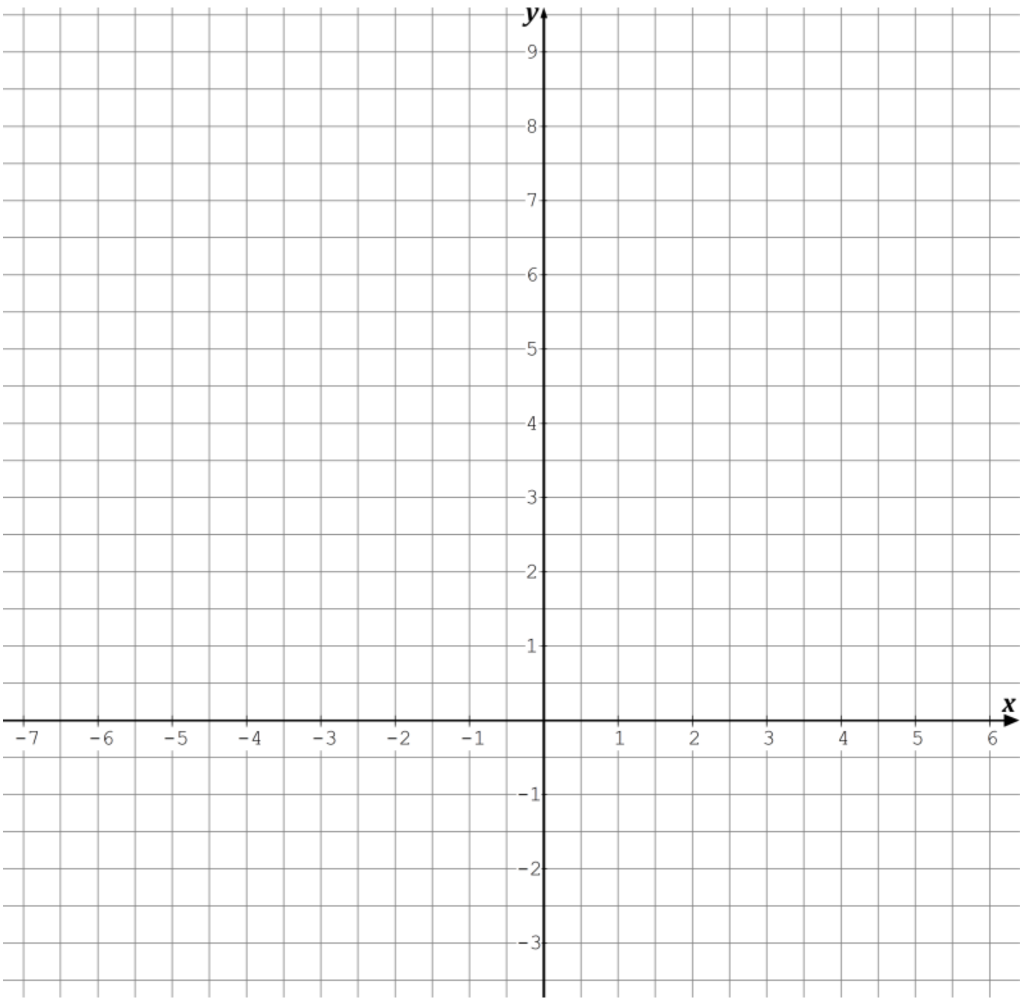
Teil I: **GTR-frei**	**Bearbeite diesen Teil auf einem separaten Papierbogen, den du spätestens nach 25 Min. mit dem Aufgabenblatt abgibst, bevor du mit Teil II beginnst. (Der WTR ist erlaubt.)**

Aufgabe 1: ***Funktionsuntersuchung***

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 6$.

a) Untersuche die Funktion auf Symmetrie, Globalverhalten, Sattel- und Extrempunkte. Notiere alle erforderlichen Begründungszusammenhänge und Schlussfolgerungen.

b) Skizziere den Graphen der Funktion auf einem geeigneten Intervall in das vorgegebene Koordinatensystem. Berechne evtl. geeignete Zwischenwerte für eine qualitativ passende Darstellung.



ggfs. weitere Funktionswerte:

x	$g(x)$

Teil II: mit GTR

Hinweis: Auch beim Einsatz der GTR-App sind sowohl der Ansatz als auch die Lösungsschritte zu dokumentieren. Es reicht nicht aus, nur die Folge von Bedienungsschritten oder Befehlen in der App anzugeben. Insbes. müssen (auch bei Berechnungen) die zugrundeliegenden mathematischen Ausdrücke wie etwa Gleichungen, Terme, Ableitungen u. ä. explizit angegeben werden. Zur vollständigen Lösung gehört über die bloße Angabe eines mit der App gewonnenen Ergebnisses auch die Einordnung des Ergebnisses in den (Sach)-Zusammenhang.

Aufgabe 2: ***Rund um den Ableitungsbegriff***

a) Die folgenden Abbildungen 2.1 bis 2.5 veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung $f'(2)$ einer Funktion f bestimmen kann.

(1) Gib an, welche geometrische Bedeutung der Wert $f'(2)$ hat.

(2) Erkläre, warum in diesen Abbildungen veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt wird.

(2) Erkläre, warum in diesen Abbildungen veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt wird.

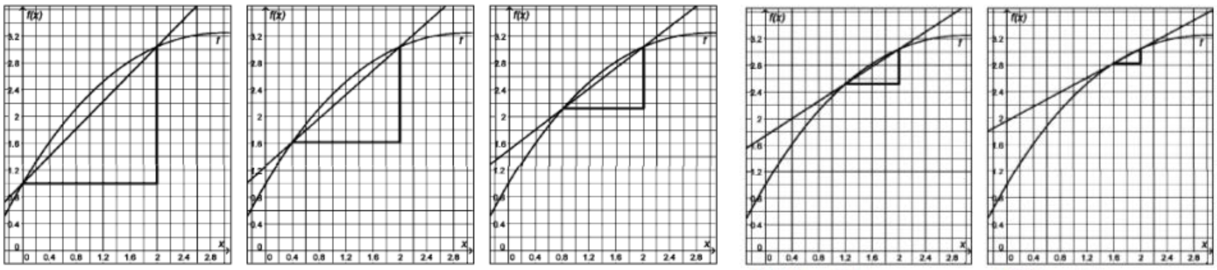
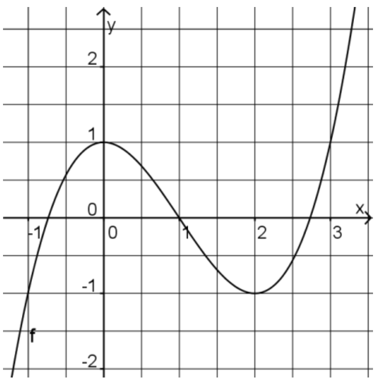
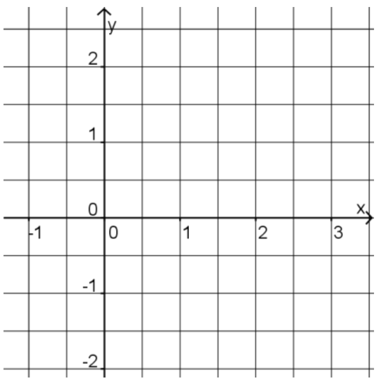


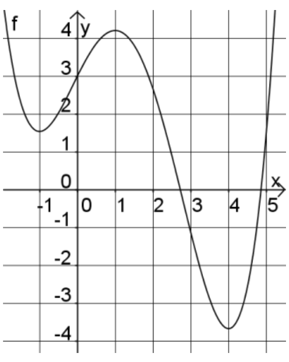
Abbildung 2.1 Abbildung 2.2 Abbildung 2.3 Abbildung 2.4 Abbildung 2.5

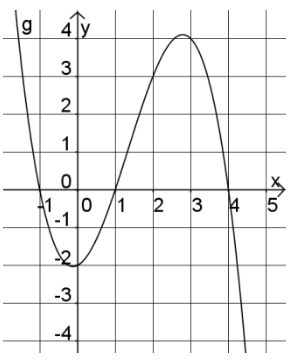
b) Gegeben sei der Graph einer Funktion f.
Skizziere den Graphen der Ableitung f' in das nebenstehende Koordinatensystem.

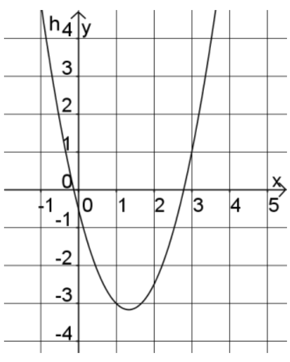




c) Gegeben seien die Graphen der Funktionen f, g und h.
Begründe, weshalb keiner der Graphen von g und h als Graph der Ableitung von f in Frage kommt.







Aufgabe 4: Ableitung und Tangenten

a) Berechne $f'(-2)$ für $f(x) = 4x^2 - 6$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.

b) Bestimme unter Anwendung der bekannten Ableitungsregeln folgende Ableitungen:

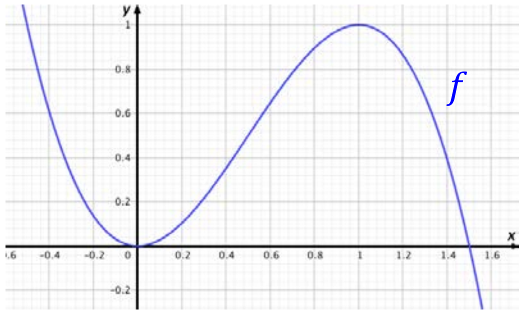
- $f(x) = x^4 - \frac{2}{3} \cdot x^{12}$ $\qquad f'(x) =$ ______________________________
- $h(x) = 0{,}5 \cdot x^5 \cdot x^2 - \sqrt{2}x$ $\qquad h'(x) =$ ______________________________
- $i(x) = (x-2) \cdot \left(3 - \frac{1}{2}x^2\right)$ $\qquad i'(x) =$ ______________________________

c) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) Berechne die Gleichung der Tangenten t an der Stelle $x = 1{,}4$ und skizziere sie im Koordinatensystem.

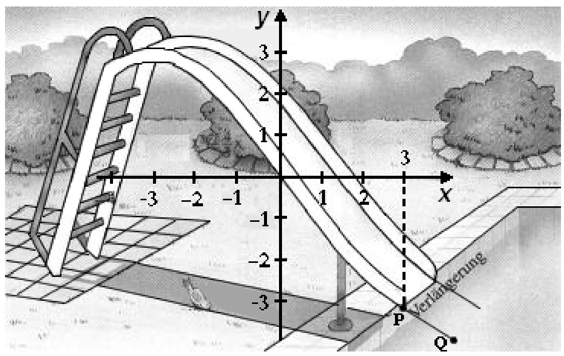
(2) Zur Tangente t gibt es am Funktionsgraphen von f eine weitere Tangente s, die parallel verläuft. Skizziere die Tangente s in das Koordinatensystem.



(3) Berechne den Berührpunkt der Tangente s an den Funktionsgraphen von f.

Aufgabe 5: Rutschenverlängerung

Die Rutschfläche der in der Abbildung gezeichneten Rutsche wird durch eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{4}{3}x$ beschrieben. Vom Punkt P $(3|y_P)$ aus soll an die Rutsche eine gerade Verlängerung bis zur Wasseroberfläche angebracht werden, auf die sie in Punkt Q trifft.
Die Wasseroberfläche kann durch die Gleichung $y = -5$ beschrieben werden. Ermittle die Koordinaten von Q.
(*Hinweis*: Beachte den Hinweis zu Beginn von Teil II.
Der exakte Rechenweg ist zu notieren!!)



Aufgabe 6: Trinkwasserversorgung

Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden.
Um den nötigen Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens 1 000 m³ Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind.
Die maximale Füllmenge beträgt 2 000 m³.
Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 8:00 Uhr für $0 \leq t \leq 2$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 850t^3 - 1663t^2 + 5t + 1563$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und $f(t)$ die Wassermenge im Speicher des Turmes in m³.
Hinweis: Einen geeigneten Ausschnitt des Graphen sieht man für $0 \leq t \leq 3$ und $0 \leq y \leq 2200$.

a) Bestimme die Wassermenge im Turm um 6:30 Uhr und um 7:15 Uhr.

b) Berechne die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion f im Intervall [0,5 ; 1] sowie $f'(0{,}7)$. Interpretiere beide Werte im Sachzusammenhang und erläutere den Bedeutungsunterschied.

c) Bestimme rechnerisch, um wieviel Uhr die Wassermenge am höchsten und um wieviel Uhr sie am niedrigsten war. Vergleiche mit der Wassermenge um 6:00 Uhr und um 8:00 Uhr. Kommentiere.

d) Argumentiere mit Hilfe der graphischen Anschauung, um wieviel Uhr die größte Abnahme der Wassermenge zu verzeichnen ist. Nenne einen möglichen Grund dafür.

e) Begründe, warum es nicht sinnvoll ist, die Modellierung der Wassermenge für $t > 2$ fortzusetzen.

Viel Erfolg beim Üben!