## Funktionsuntersuchung am Bsp. f mit

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{16}x^5-\frac{15}{32}x^4+\frac{5}{6}x^3} \qquad D=\mathbb{R}$$

(1) Symmetrie zum KoSy: keine, da das Polynom sowohl gerade als auch ungerade Exponenten aufweist

(2) Globalverhalten: f ist eine ganzrationale Fkt mit ungeradem Grad und positivem Leitkoeffizienten, d.h.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

(Der Graph von f "kommt von unten und geht nach oben".)

(3) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

- mit der y-Achse: $f(0)=0$ : $\boxed{Y(0|0)}$
- mit der x-Achse: $f(x)=\frac{1}{16}x^3\left(x^2-\frac{15}{2}x+\frac{40}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ oder $x^2-\frac{15}{2}x+\frac{40}{3}=0$

(dreifache Nst.) $\quad x_{1,2}=\frac{15}{4}\pm\sqrt{\frac{35}{48}}$

$x_1\approx 2{,}90$ ; $x_2\approx 4{,}60$

$$\boxed{N_1(0|0)\ ;\ \underbrace{N_2(2{,}90|0)\ ;\ N_3(4{,}60|0)}_{\text{Schnittpkte mit x-Achse}}}$$

$\uparrow$ Sattelpunkt

(4) Ableitung: $f'(x)=\frac{5}{16}x^4-\frac{15}{8}x^3+\frac{5}{2}x^2$

(5) Extrempunkte von f:

Notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle ist $f'(x)=0$:

$$\frac{5}{16}x^4-\frac{15}{8}x^3+\frac{5}{2}x^2=0 \quad \Big| \cdot\frac{16}{5}$$

$$\Leftrightarrow x^4-6x^3+8x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-6x+8)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee\ x^2-6x+8=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee\ x=2 \ \vee\ x=4$$

Somit können höchstens an den Stellen $x=0$, $x=2$ oder $x=4$ Extrema vorliegen, denn dies sind die einzigen Stellen mit waagerechten Tangenten.

Das Monotonieverhalten von f in der Umgebung dieser Stellen gibt Aufschluss darüber, ob hier tatsächlich Extrema vorliegen und um welche Art von Extremum es sich dann handelt. Über das Monotonieverhalten gibt das Vorzeichen der 1. Ableitung Aufschluss!

$x=0 \qquad x=2 \qquad x=4$

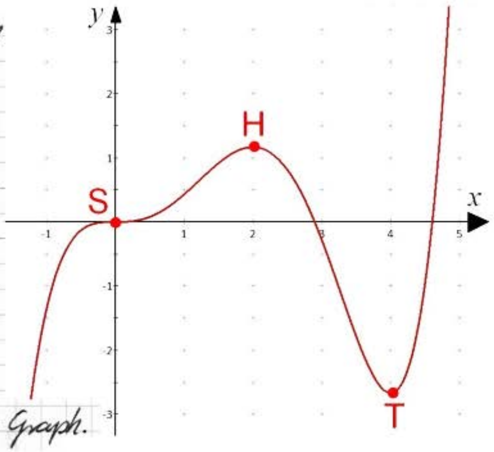
| | $x<0$ | $0<x<2$ | $2<x<4$ | $x>4$ |
|---|---|---|---|---|
| VZ von $f'(x)$ | $f'(-1)=4\frac{11}{16}$ (+) | $f'(1)=\frac{15}{16}$ (+) | $f'(3)=-2\frac{13}{16}$ (−) | $f'(5)=23\frac{7}{16}$ (+) |
| | f steigt ↗ | f steigt ↗ | f fällt ↘ | f steigt ↗ |

Bei $x=0$ hat f einen Sattelpunkt: $f(0)=0$ : $\boxed{S(0|0)}$

Bei $x=2$ hat f einen Hochpunkt: $f(2)=1\frac{1}{6}$ : $\boxed{H(2|1\frac{1}{6})}$

Bei $x=4$ hat f einen Tiefpunkt: $f(4)=-2\frac{2}{3}$ : $\boxed{T(4|-2\frac{2}{3})}$

Da sich das VZ von $f'(x)$ zwischen zwei Nst. von $f'$ (und damit das Monotonieverhalten von f) nicht ändern kann, genügt es, das VZ von $f'$ an einer einzigen Stelle zwischen 2 Nst. von $f'$ zu überprüfen und daraus auf die Monotonie von f zu schließen!
Es ergibt sich der nebenstehende Graph.




Bearbeite analog:

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$ und $f(x)=x^3-6x^2+9x$