Aufgaben im Sachzusammenhang

S. 98 **3** Die Anzahl der Besucher eines Schulfests soll im Zeitraum von 7:30 Uhr bis 16:30 Uhr durch die Funktion f mit $f(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 182$ beschrieben werden (t ist die Zeit in Stunden, wobei $7{,}5 \le t \le 16{,}5$).

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Besucher, die um 11 Uhr auf dem Schulfest war.

b) Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Zahl der Besucher fortwährend ansteigt.

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die meisten bzw. die wenigsten Besucher auf dem Schulfest waren.

Besucherzahl eines Schulfestes:

f: Zeit t [h] $\longrightarrow$ Anzahl Besucher $\quad 7{,}5 \le t \le 16{,}5$

$f(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 182 \quad (t \mathrel{\hat{=}} \text{Uhrzeit})$

a) Besucherzahl um 11 Uhr $\mathrel{\hat{=}} t = 11$: $\quad f(11) = 468$ [Besucher]

b) Zeitraum mit steigender Besucherzahl:

$\mathrel{\hat{=}}$ Zeitraum mit $f'(t) > 0$

$f'(t) = -3t^2 + 48t - 117 = -3(t^2 - 16t + 39) = -3(t-3)(t-13)$

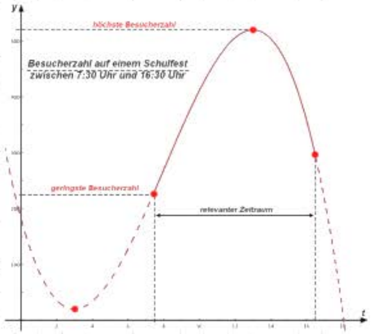
Es ist $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \underset{\notin D}{3}$ oder $t = 13$

Da z.B. $f'(10) = 63 > 0$ ist, kann man folgern, dass $f'(t)$ im Intervall $]3; 13[$ positiv ist:

$\Rightarrow$ Die Besucherzahl steigt fortwährend an zwischen 7:30 Uhr und 13:00 Uhr. ($t = 3 \mathrel{\hat{=}} 3$ Uhr $\notin D$; das Schulfest beginnt erst um 7:30 Uhr.)

c)

	t = 0	t = 3	t = 10	t = 13	t = 15
$f'(t)$	-117 < 0	0	63 > 0	0	-168 < 0
Monotonie von f	$\searrow$		$\nearrow$	H(13|520)	$\searrow$
Extr.-pkt		T(3|20)			



f hat bei $t = 3$ einen lok. TP, aber $t = 3 \notin D$ (Sachkontext); der lok. HP bei $t = 13$ liegt im relevanten Zeitraum.

Fktwerte am Rand von D: $f(7{,}5) \approx 232$; $f(16{,}5) \approx 293 < 520$

S. 99 **4** Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 10$ beschreibt für $x \in [6; 20]$ näherungsweise die Temperatur in Grad Celsius von 6 Uhr bis 20 Uhr im Laufe eines Tages (Fig. 1).

a) Berechnen Sie die Temperatur um 10 Uhr und um 20 Uhr.

b) Berechnen Sie die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten vier Stunden seit Beobachtungsbeginn.

c) Berechnen Sie die momentane Temperaturänderung um 10 Uhr morgens.

d) Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der die Funktion die höchste Temperatur liefert.

Tagestemperatur: Uhrzeit x [h] $\longrightarrow$ Temperatur [°C]

$f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 10 \quad ; \; x \in [6; 20]$

a) Temperatur um 10 Uhr: $f(10) = 20$ [°C]

um 20 Uhr: $f(20) = 10$ [°C]

b) durchschnittl. Temperaturanstieg in den ersten 4 Std. nach Beobachtungsbeginn, d.h. von 6 bis 10 Uhr:

$$\Delta t = \frac{f(10) - f(6)}{10 - 6} = \frac{20 - 15{,}04}{4} = 1{,}24 \left[\frac{°C}{h}\right]$$

Pro Stunde ist die Tagestemperatur durchschnittlich um 1,24 °C gestiegen.

c) momentane Temperaturänderung um 10 Uhr $\mathrel{\hat{=}} f'(10)$

$f'(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}4x \quad ; \; f'(10) = \underline{\underline{1 \left[{°C}/{h}\right]}}$

d) Tageshöchsttemperatur

$f'(x) = -0{,}03x\left(x - \frac{40}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; (\notin D)$ oder $x = 13\frac{1}{3}$

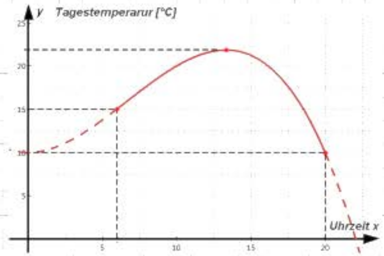
$$\left.\begin{array}{l} f'(10) = 1 > 0 \\ f'(13\frac{1}{3}) = 0 \\ f'(15) = -0{,}75 < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{VZW von } f'(x) \\ \text{bei } x = 13\frac{1}{3} \\ \text{von} \oplus \text{nach} \ominus \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ hat bei } x = 13\frac{1}{3} \\ \text{ein lokales Max.} \\ (\mathrel{\hat{=}} 13{:}20 \text{ Uhr}) \end{array}$$

Vergleich mit den Randwerten:

$f(6) = 15{,}04$

$f(13\frac{1}{3}) = 21{,}85 > f(6); f(20)$

$f(20) = 10$



Dh.: Im betrachteten Zeitraum ist die Temperatur um 13:20 am höchsten mit ca 21,9 °C.

LS EF, S. 99 Aufg. 7: ***Durchflussgeschwindigkeit eines Flusses***

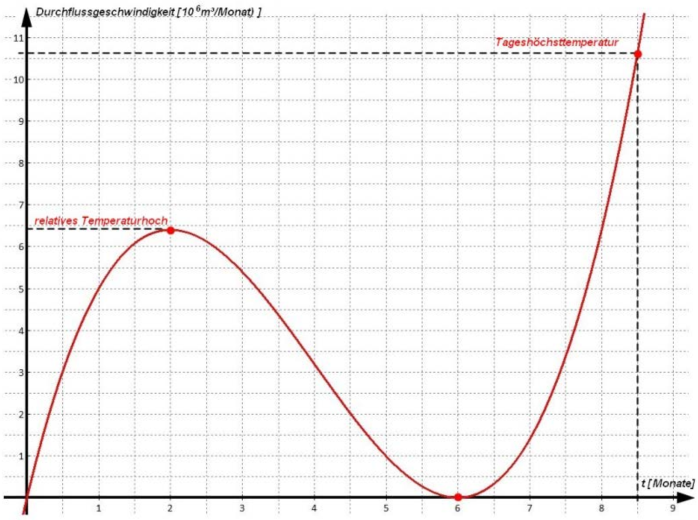
Die Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}2 \cdot t^3 - 2{,}4 \cdot t^2 + 7{,}2 \cdot t \ \ (0 \leq t \leq 8{,}5; \quad t \text{ in Monaten; } f(t) \text{ in } 10^6 \, \frac{m^3}{Monat})$$

beschreibt näherungsweise die Durchflussgeschwindigkeit eines Flusses.

a) Zeichne den Graphen mit dem GTR.

b) Bestimme mit Hilfe des GTR die charakteristischen Punkte von f und erkläre deren Bedeutung im Sachzusammenhang.



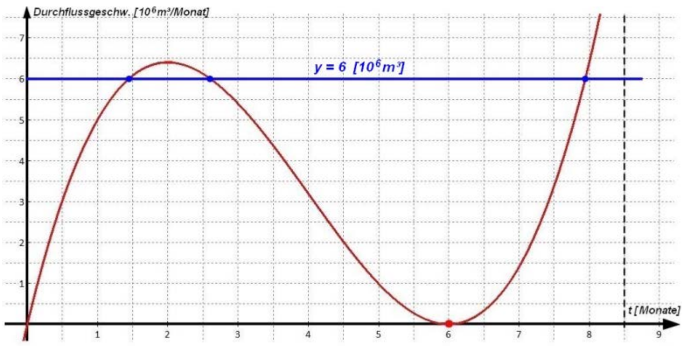
Der GTR liefert: Nullstellen: 0 und 6
y-Achsenabschnitt: 0
H (2|6,4) und T (6|0)

Die Durchflussgeschwindigkeit ist zunächst 0 m³ pro Monat, der Fluss führt zu diesem Zeitpunkt vermutlich kein Wasser mehr.
Dann steigt sie im Laufe der Monate stetig an. Ein Grund hierfür könnten starke Regenfälle sein. Nach zwei Monaten erreicht die Durchflussgeschwindigkeit zunächst ein Maximum, zu diesem Zeitpunkt beträgt sie 6 400 000 m³ pro Monat. Jetzt beginnt vermutlich eine trockene Zeit und die Durchflussgeschwindigkeit nimmt bis zum 6. Monat nach Aufzeichnungsbeginn immer weiter ab, bis sie nach genau 6 Monaten wieder bei 0 ist, der Fluss also erneut kein Wasser führt. Nach dem 6. Monat fängt es vermutlich wieder an, zu regnen, die Durchflussgeschwindigkeit nimmt nun immer weiter zu.

c) Wann ist die Durchflussgeschwindigkeit am größten und wie groß ist sie dann?

Da der Hochpunkt H (2 |6,4) bereits in b) bestimmt wurde, muss nur noch der rechte Rand des Definitionsbereichs überprüft werden.
f (8,5) = 10 625 000 > 6 400 000, also ist die Durchflussgeschwindigkeit nach 8,5 Monaten mit 10 625 000 m³ pro Monat am größten.

d) Bestimme mit Hilfe des GTR die Zeitpunkte, zu denen die Durchflussgeschwindigkeit 6 000 000 $\frac{m^3}{Monat}$ beträgt.



Man bestimmt mithilfe des GTR die Schnittpunkte der Geraden mit der Gleichung $y = 6$ mit dem Graphen von f: S_1 (1,45|6), S_2 (2,61|6) und S_3 (7,94|6).
Nach etwa eineinhalb, nach gut zweieinhalb und nach knapp 8 Monaten beträgt also die Durchflussgeschwindigkeit etwa 6 000 000 m³ pro Monat.

e) Begründe, dass die Funktion f nicht geeignet ist, die Durchflussgeschwindigkeit des Flusses für ein gesamtes Jahr zu beschreiben.

Ab $t = 6$, also insbes. ab $t = 8{,}5$ ist der Graph von f streng monoton steigend. Die Durchflussgeschwindigkeit würde immer größer werden und am Ende des Jahres bereits $f(12)$ = 86 400 000 m³/ Monat betragen, was ein unrealistischer Wert ist.

LS EF, S. 99 Aufg. 8: ***Höchstgeschwindigkeit eines Läufers***

Um festzustellen, zu welchem Zeitpunkt ein 100 m-Läufer seine Höchstgeschwindigkeit erreicht, erstellt sein Trainer anhand einer Videoaufzeichnung ein Weg-Zeit-Diagramm.
Der Lauf kann durch die Weg-Zeit-Funktion s mit $s(t) = 0{,}0056 \cdot t^4 - 0{,}2 \cdot t^3 + 2{,}4 \cdot t^2$ beschreiben werden, wobei s in Metern und t in Sekunden angegeben wird.

100 m-Lauf: $Zeit\ t\ [sek] \to zurückgelegter\ Weg\ s\ \ [m]$ mit
$s(t) = 0{,}0056 \cdot t^4 - 0{,}2 \cdot t^3 + 2{,}4 \cdot t^2$

a) Beschreibe, wie weit der Läufer in den ersten 5 Sekunden gelaufen ist.

zurückgelegter Weg in den ersten 5 Sekunden: $s(5) = 38{,}5\ [m]$

b) Bestimme die durchschnittliche Geschwindigkeit des Läufers in den ersten 5 Sekunden.

$\bar{v} = \frac{s(5)-s(0)}{5-0} = \frac{38{,}5-0}{5} = 7{,}7\ [{}^{m}/_{sec}]$:
In den ersten 5 sec hatte der Läufer eine Durchschnittsgeschwindigkeit von ca. 7,7 m/sek.

c) Berechne die Geschwindigkeit des Läufers nach 0,5 Sekunden.

Die Momentangeschwindigkeit des Läufers wird durch die Ableitungsfunktion s' angegeben:
$s'(t) = 0{,}0224 \cdot t^3 - 0{,}6 \cdot t^2 + 4{,}8 \cdot t$, somit $s'(0{,}5) \approx 2{,}253\ [{}^{m}/_{sec}]$
Nach 0,5 Sekunden hat der Läufer eine (Momentan)Geschwindigkeit von ca. 2,25 m/sek ≙ 8,1 km/h

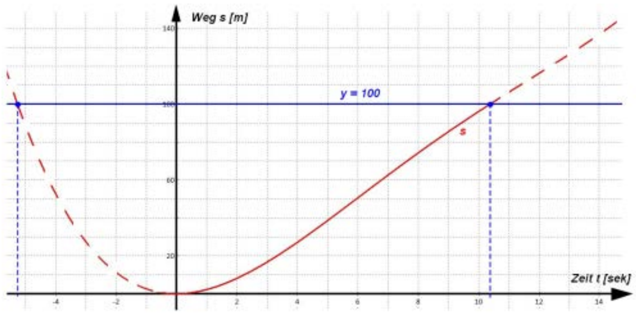
d) Zeige rechnerisch, dass der Läufer nach 10 Sekunden das Ziel noch nicht erreicht hat.
Bestimme näherungsweise die Zeit, die der Läufer für den 100 m-Lauf benötigt.

Nach 10 Sek. hat der Läufer einen Weg von $s(10) = 96\ [m]$ zurückgelegt und damit noch nicht die 100 m-Ziellinie erreicht.
Die näherungsweise Dauer des 100 m-Laufs kann man durch Ausprobieren ermitteln:

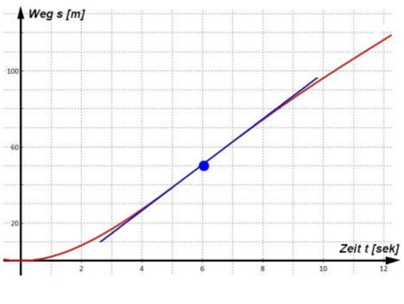
$s(10{,}3) \approx 99{,}1\ [m] \quad < 100\ [m]$ $\qquad s(10{,}38) \approx 99{,}92\ [m] \quad < 100\ [m]$
$s(10{,}4) \approx 100{,}1\ [m] \quad > 100\ [m]$ $\qquad s(10{,}39) \approx 100{,}02\ [m] \quad > 100\ [m]$

Der Läufer erreicht nach 10,39 Sek. die 100 m-Linie.

Mit dem GTR ist eine genauere Bestimmung der Zeit möglich. Plotte dazu den Graphen von s sowie die Geraden mit der Gleichung $y = 100$ und ermittle deren Schnittpunkte:
$S_1\ (-5{,}265|100)$ und $S_2\ (10{,}388|100)$.



Nachtrag:



Der Zeitpunkt, an dem der Läufer seine Höchstgeschwindigkeit erreicht, entspricht der Maximalstelle von s', da die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion die momentane Geschwindigkeit des Läufers beschreibt.

In dem Zeitraum [0;10,4] des 100 m-Laufes erreicht der Läufer seine höchste Geschwindigkeit zum $t \approx 6{,}05$ [sek]. Die erreichte Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Tangente an dieser Stelle:
$v_{max} = s'(6{,}05) \approx 12{,}03\ \left[{}^{m}/_{sek}\right]$