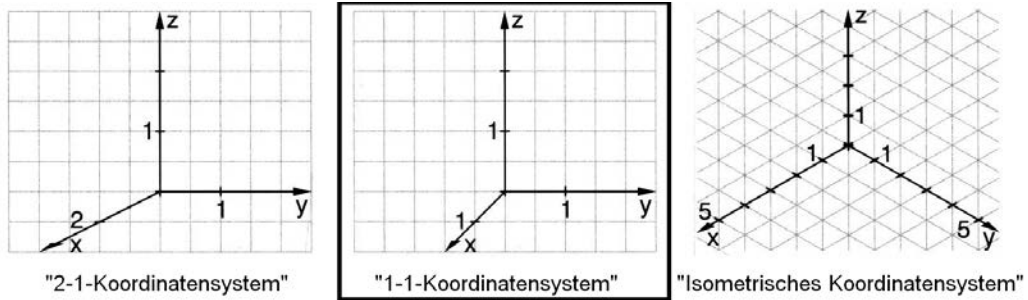


DAS RÄUMLICHE KOORDINATENSYSTEM - LÖSUNG

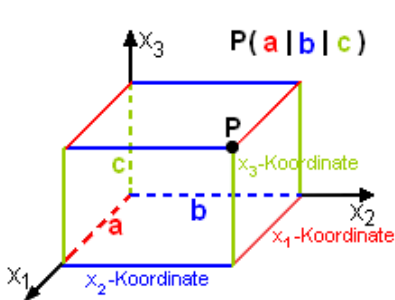
Im dreidimensionalen Raum können Punkte durch ein geeignetes Koordinatensystem mit drei Achsen festgelegt werden. Dabei ist es üblich, dass die x_1 -(x-) Achse nach vorne, die x_2 -(y-) Achse nach rechts und die x_3 -(z-) Achse nach oben zeigt.



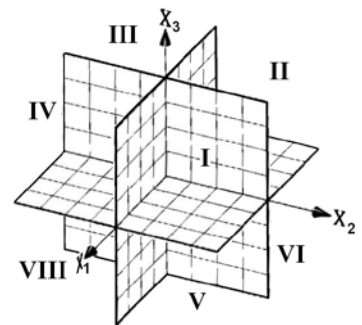
Eine oft verwendete Möglichkeit ist die hier in der Mitte abgebildete, bei welcher der 90° -Winkel zwischen der x_2 - und x_1 -Achse als 135° -Winkel dargestellt wird und die x_1 -Koordinaten mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gestaucht werden, d.h. Länge Kästchendiagonale $\cong 2$ Längeneinheiten. Das ist mit Karopapier leicht zu realisieren und vermittelt eine gewisse räumliche Perspektive.

Ein Punkt P wird durch seine Koordinaten $(a|b|c)$ angegeben, wobei a die x_1 -(x-) Koordinate, b die x_2 -(y-) Koordinate und c die x_3 -(z-) Koordinate angibt.

Die Koordinatenachsen bilden drei Koordinatenebenen, wodurch das Koordinatensystem in acht Teile zerlegt wird, den sog. Oktanten. Die begrenzenden Koordinatenebenen gehören nicht zu den Oktanten; die jeweiligen Vorzeichen der Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum geben somit an, in welchem der acht Oktanten ein Punkt liegt.



x_1	x_2	x_3	Oktant
+	+	+	I
-	+	+	II
-	-	+	III
+	-	+	IV
+	+	-	V
-	+	-	VI
-	-	-	VII
+	-	-	VIII



Aufgaben:

A 1: Gegeben sind folgende **Koordinaten eines Hauses** mit einem Satteldach, bei dem die Grundfläche aus den Punkten A, B, C und D besteht (Punkt E liegt über A, F über B usw.). Insgesamt ist das Haus 6 m hoch (Giebelspitze), die Höhe, bei der das Dach "beginnt", beträgt 4 m. Folgende Punkte sind gegeben:

A $(-1|-3|0)$, B $(-1|3|0)$, G $(-5|3|4)$, Giebelspitze zwischen G und H ist K mit K $(-5|0|6)$.

Bestimme die übrigen Punkte und gib weitere Koordinaten so an, dass die Rasenfläche (komplett um das Haus) insgesamt 96 m^2 beträgt.



- A $(-1|-3|0)$ B $(-1|3|0)$ K $(-5|0|6)$
 C $(-5|3|0)$ D $(-5|-3|0)$ L $(-1|0|6)$
 E $(-1|-3|4)$ F $(-1|3|4)$
 G $(-5|3|4)$ H $(-5|-3|4)$

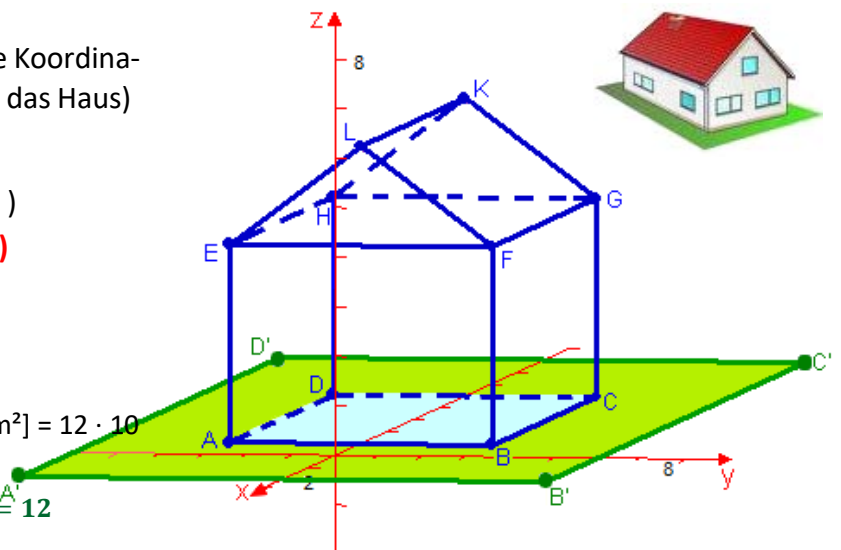
$\Rightarrow A_{ABCD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = 6 \cdot 4 = 24 \text{ [m}^2\text{]}$

$\Rightarrow A_{A'B'C'D'} = A_{Rasen} + A_{Haus} = 96 + 24 = 120 \text{ [m}^2\text{]} = 12 \cdot 10$

A' $(2|-6|0)$ B' $(2|6|0)$

$x_{A'} - x_{D'} = 2 + 8 = 10$; $x_{B'} - x_{A'} = 6 + 6 \cong 12$

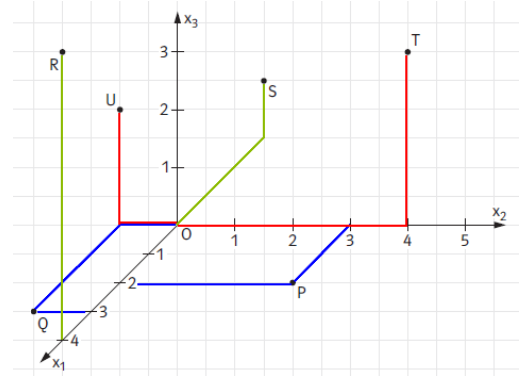
C' $(-8|6|0)$ D' $(-8|-6|0)$



A 2: Koordinaten ablesen

Bestimme die Koordinaten der Punkte

- Punkte P und Q in der x_1x_2 -Ebene: P $(2 | 3 | 0)$; Q $(3 | -1 | 0)$
- Punkte R und S in der x_1x_3 -Ebene: R $(4 | 0 | 5)$; S $(-3 | 0 | 1)$
- Punkte T und U in der x_2x_3 -Ebene: T $(0 | 4 | 3)$; U $(0 | -1 | 2)$



A 3: Spiegeln von Punkten im Raum

Gegeben sei ein Punkt P im Raum. Der Punkt P wird gespiegelt

- (1) an der xy -Ebene
- (2) an der yz -Ebene
- (3) an der xz -Ebene
- (4) an der x -Achse
- (5) an der y -Achse
- (6) an der z -Achse
- (7) am Koordinatenursprung
- (8) nacheinander an der x -Achse, dann an der y -Achse und schließlich an der z -Achse.
Spielt die Reihenfolge eine Rolle?
- (9) nacheinander an der xy -Ebene, dann an der yz -Ebene und schließlich an der xz -Ebene.
Spielt die Reihenfolge eine Rolle?

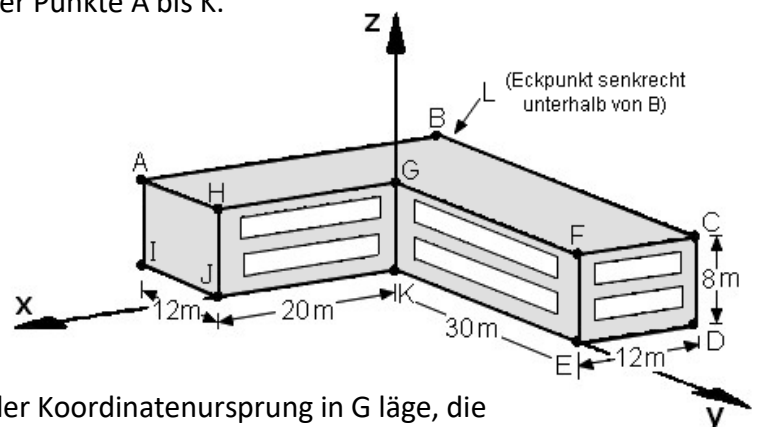
Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes von P.

Spiegelungen im Raum	$P \triangleq$	$P(1 2 3)$	$P(-1 2 -3)$	$P(1 0 3)$	$P(4 -1 0)$
(1) an der xy -Ebene		$(1 2 -3)$	$(-1 2 3)$	$(1 0 -3)$	$(4 -1 0)$
(2) an der yz -Ebene		$(-1 2 3)$	$(1 2 -3)$	$(-1 0 3)$	$(-4 -1 0)$
(3) an der xz -Ebene		$(1 -2 3)$	$(-1 -2 -3)$	$(1 0 3)$	$(4 1 0)$
(4) an der x -Achse		$(1 -2 -3)$	$(-1 -2 3)$	$(1 0 -3)$	$(4 1 0)$
(5) an der y -Achse		$(-1 2 -3)$	$(1 2 3)$	$(-1 0 -3)$	$(-4 -1 0)$
(6) an der z -Achse		$(-1 -2 3)$	$(1 -2 -3)$	$(-1 0 3)$	$(-4 1 0)$
(7) am Koordinatenursprung	P^*	$(-1 -2 -3)$	$(1 -2 3)$	$(-1 0 -3)$	$(-4 1 0)$
(8) nacheinander an der x -, y -, z -Achse		P	P	P	P
(9) nacheinander an der xy -, yz -, xz -Ebene		P^*	P^*	P^*	P^*

4. Die Abbildung zeigt ein **Schulgebäude**, das auf ein Koordinatensystem bezogen ist.

a) Bestimme aus der Abbildung die Koordinaten der Punkte A bis K.

- A $(20|-12|8)$ B $(-12|-12|8)$ C $(-12|30|8)$
 D $(-12|30|0)$ E $(0|30|0)$ F $(0|30|8)$
 G $(0|0|8)$ H $(20|0|8)$ I $(20|-12|0)$
 J $(20|0|0)$ K $(0|0|0)$ L $(-12|-12|0)$



b) Welche Punkte liegen in der xy -Ebene, welche in der xz -Ebene und welche in der yz -Ebene? Welche Punkte des Gebäudes liegen in **keiner** dieser Ebenen?

c) Welche Koordinaten hätten die Punkte, wenn der Koordinatenursprung in G läge, die x -Achse in Richtung H, die y -Achse in Richtung F und die z -Achse in Richtung K verlief?
 → Alle z -Koordinaten der Punkte sind um 8 Einheiten kleiner als ursprünglich.

d) Welche Koordinaten hätten die Punkte, wenn der Koordinatenursprung in D läge, die x -Achse in Richtung E, die y -Achse in Richtung parallel zur Geraden EK und die z -Achse in Richtung C verlief?
 → Alle x -Koordinaten der Punkte sind um 12 Einheiten größer, alle y -Koordinaten um 30 Einheiten kleiner als ursprünglich.