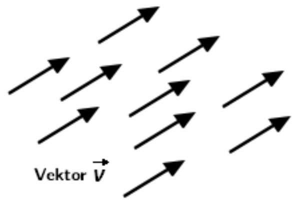
Begriffe zur Vektorrechnung

Vektor:

(1) Ein Vektor mit drei Koordinaten ist ein geordnetes Zahlentripel, das wir als Spalte schreiben. Zur Abkürzung bezwichnen wir Vektoren mit kleinen Buchstaben und einem Pfeil. Die Einträge des Vektors heißen **Komponenten**.

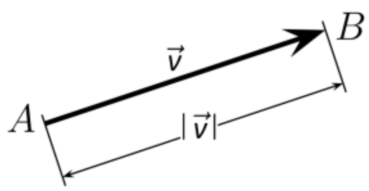
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Ein Vektor ist eine Klasse schiebungsgleicher Pfeile, d. h. die Menge aller *gleichgerichteten*, *gleichorientierten* und *gleichlangen* Pfeile.
Ein Pfeil heißt **Repräsentant** des Vektors.
Ein Vektor kann die Verschiebung eines Punktes beschreiben, ist jedoch nicht an diesen gebunden.



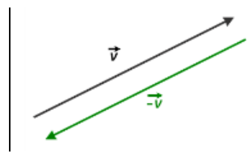
Länge eines Vektors:

Unter der **Länge** eines Vektors $\vec{v}$ versteht man die Länge der Pfeile, die im Koordinatensystem den Vektor $\vec{v}$ repräsentieren.
Statt Länge wird auch der Begriff **Betrag** verwendet.
Die Bezeichnung für die Länge bzw. den Betrag lautet $|\vec{v}|$.
Es gilt für einen dreidimensionalen Vektor: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.



Gegenvektor:

Zu jedem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gibt es den **Gegenvektor** $\overrightarrow{-v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$.
Dieser macht die Verschiebung durch $\vec{v}$ rückgängig.

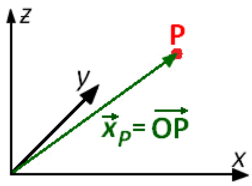


Nullvektor:

Der Vektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**. Er hat die Länge Null und keine Richtung, kann somit nicht mit einem Pfeil dargestellt werden.

Ortsvektor:

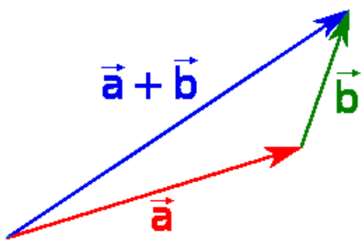
Zu jedem Punkt P existiert ein Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Dieser Pfeil legt eindeutig einen Vektor fest. Wir nennen ihn **Ortsvektor** des Punktes P und bezeichnen ihn mit $\overrightarrow{x_P}$ oder auch $\overrightarrow{OP}$.



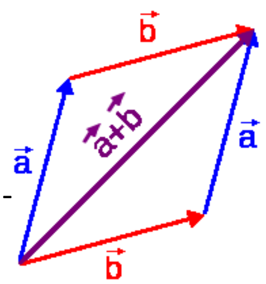
Vektoraddition:

Das Hintereinanderausführen zweier Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt wieder eine Verschiebung. Diese wird durch den Vektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ beschrieben. Der Vektor $\vec{s}$ heißt **Summe** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder auch **Summenvektor** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Graphisch betrachtet bedeutet dies: Man hängt an einen Pfeil des ersten Vektor eines passenden Repräsentanten des zweiten Vektors.
Die Vektoren werden komponentenweise addiert:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}.$$



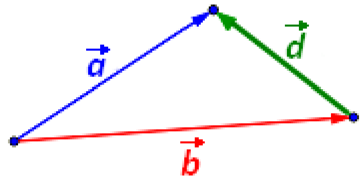
Der Summenvektor entspricht der 1. Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.



Für die Vektoraddition gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz:

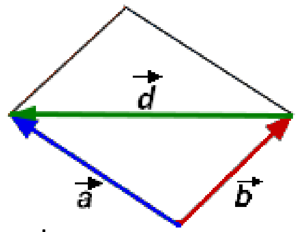
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Vektorsubtraktion:
Entsprechend zur Addition kann man Vektoren auch komponentenweise subtrahieren. Man nennt $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ die **Differenz** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder den **Differenzvektor** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich erhält man $\vec{d}$, wenn man zwei Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in einem gemeinsamen Punkt einträgt und die Spitze von $\vec{b}$ mit der von $\vec{a}$ verbindet. Ebenso kann die Vektorsubtraktion durch die Addition mit dem Gegenvektor verdeutlicht werden.

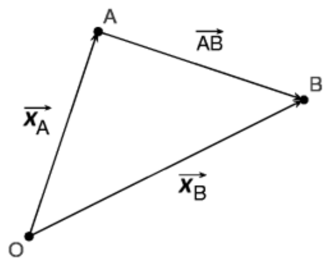


Der Differenzvektor entspricht der 2. Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

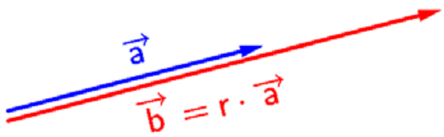
Vektorkette:
Eine Aneinanderreihung von Vektoren nennt man **Vektorkette**. Ist der Beginn des ersten und die Spitze des letzten Pfeils verschieden, so heißt die Vektorkette **offen,** ansonsten **geschlossen**.

Dreiecksregel:
Es gilt für alle Punkte P, Q und R: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
Für zwei Ortsvektoren $\vec{x_A}$ und $\vec{x_B}$ gilt demnach $\vec{x_A} + \overrightarrow{AB} = \vec{x_B}$.
Daraus folgt für den **Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$:**

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x_B} - \vec{x_A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$



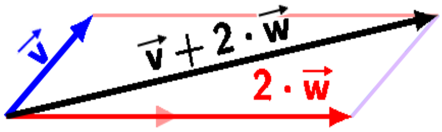
Skalare Multiplikation:
Die komponentenweise Multiplikation mit einer reelen Zahl r (Skalar) mit einem Vektor $\vec{v}$ be-zeichnet man als **skalare Multiplikation** eines Vektors.



$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

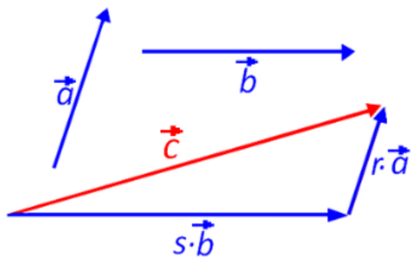
Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **kollinear**, wenn sie Vielfache voneinander sind.

Linearkombination:
Einen Ausdruck wie $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ nennt man **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.
Die Koeffizienten r, s und t heißen **Skalare**.



Komplanar:
Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **komplanar**, wenn sich ein Vektor als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt.
So gibt es Skalare s und t, für die gilt:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}.$$



Komplanare Vektoren liegen in einer Ebene.
Mehrere Punkte heißen komplanar, wenn sie in einer Ebene liegen.