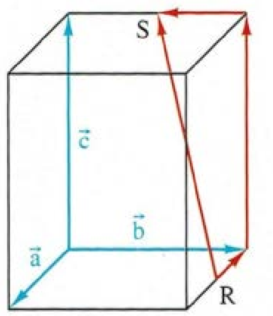
Aufgaben zu Linearkombinationen: Routine erwerben!! - LÖSUNGEN

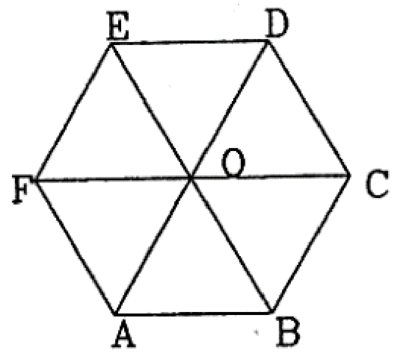


Beispiel:
R und S sind Kantenmitten des Quaders in Fig. 1. Stelle den Vektor $\overrightarrow{RS}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Lösung:
Suche einen "Vektorweg" von R nach S.
Eine Möglichkeit ist: $\overrightarrow{RS} = -0{,}5\vec{a} + \vec{c} - 0{,}5\vec{b} = -0{,}5\vec{a} - 0{,}5\vec{b} + \vec{c}$.

A 1: *Vektorsummen im regelmäßigen Sechseck*

Veranschauliche anhand des Sechsecks rechts folgende Vektorsummen.



a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

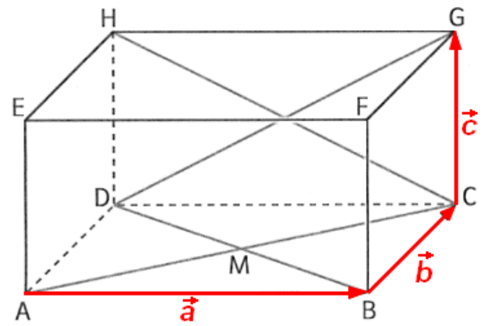
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$
$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$
$= (\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$

A 2: *Vektoren in einem Quader*

Drücke folgende Vektoren mithilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



a) $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

c) $\overrightarrow{EC} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$

d) $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

e) $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

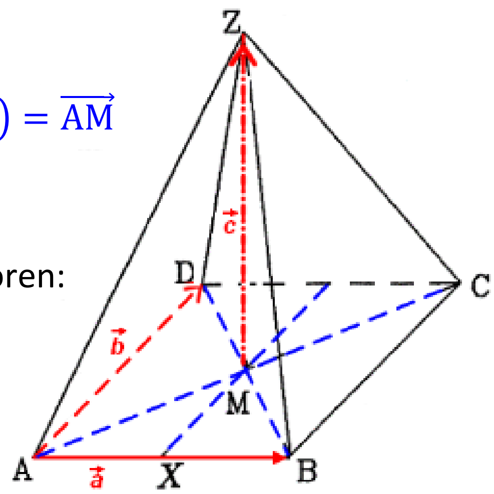
A 5: *Vektoren in einer Pyramide*

a) Bestimme in der quadratischen Pyramide die nachfolgenden Vektoren durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{MZ}$:

(1) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AM}$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AM}$

(3) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} = \overrightarrow{AB}$



b) **Bestimme** mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die folgenden Vektoren:

(1) $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BZ} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{CZ} = -\frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(4) $\overrightarrow{DZ} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$

(5) $\overrightarrow{XZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \vec{c}$

A6:

a) Gib' im Parallelogramm in Fig. 1 die Vektoren $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ als Linearkombinationen von $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ an.

$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ $\quad$ $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

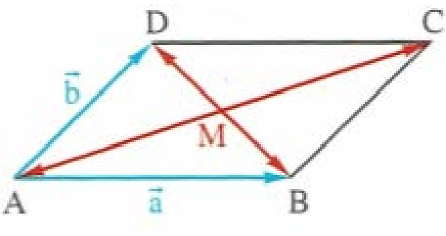


Fig. 1

b) In Fig. 2 sind M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der Dreiecksseiten.

Drücke $\overrightarrow{AM_a}$, $\overrightarrow{BM_b}$, $\overrightarrow{CM_c}$ als Linearkombinationen von $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ aus.

$\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

$\overrightarrow{BM_b} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ $\quad$ $\overrightarrow{CM_c} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$

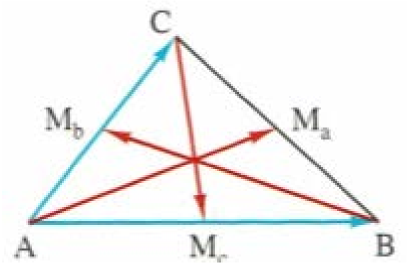


Fig. 2

c) Fig. 3 zeigt eine dreiseitige. Drücke $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aus.

$\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c} = \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = -\vec{b} + \vec{d} = \vec{d} - \vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = -\vec{c} + \vec{d} = \vec{d} - \vec{c}$

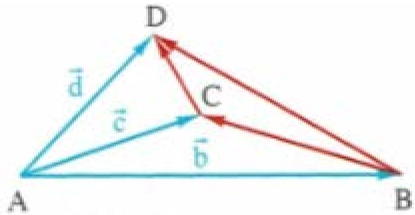


Fig. 3

d) Fig. 4 zeigt eine quadratische Pyramide. Drücke $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ aus.

$\overrightarrow{SD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b}$

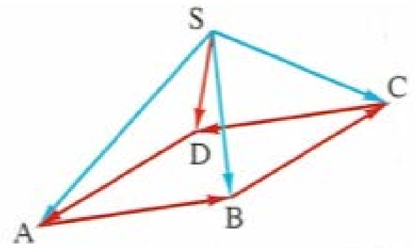
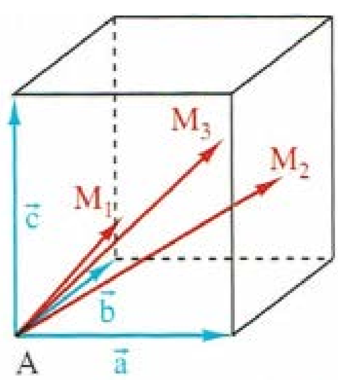


Fig. 4

A7: M_1, M_2, M_3 sind die Mittelpunkte der "vorderen", "rechten" und "hinteren" Seitenfläche des Quaders. Stelle $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$, $\overrightarrow{AM_3}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aus.



Mittelpunkt der "vorderen Seitenfläche":

$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$

Mittelpunkt der "rechten Seitenfläche":

$\overrightarrow{AM_2} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

Mittelpunkt der "hinteren Seitenfläche":

$\overrightarrow{AM_3} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$